УДК 517.9
doi:10.21685/2072-3040-2021-1-3

Об изучении спектра семейства дифференциальных операторов, потенциалы которых сходятся к дельта-функции Дирака

С. И. Митрохин

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

mitrokhin-sergey@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* В работе предлагается новый метод исследования дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами. Изучается последовательность дифференциальных операторов высокого четного порядка, потенциалы которых сходятся к дельта-функции Дирака. Предполагается, что потенциал оператора является кусочно-суммируемой функцией на отрезке задания оператора. В точках разрыва потенциала требуется выполнение условий «склейки» для корректного определения решений соответствующих дифференциальных уравнений. Исследованы спектральные свойства дифференциальных операторов, заданных на конечном отрезке, с одним из видов разделенных граничных условий. При больших значениях спектрального параметра методом Наймарка получена асимптотика фундаментальной системы решений соответствующих дифференциальных уравнений. С помощью этой асимптотики изучены условия «склейки» рассматриваемого дифференциального оператора. Затем изучены граничные условия исследуемого оператора. В результате выведено уравнение на собственные значения изучаемого оператора, которое представляет собой целую функцию. Исследована индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения, которая является правильным шестнадцатиугольником. В различных секторах индикаторной диаграммы методом последовательных приближений Пикара найдена асимптотика собственных значений изучаемых дифференциальных операторов. В предельном случае найденная асимптотика собственных значений стремится к асимптотике собственных значений оператора, потенциалом которого является дельта-функция Дирака. *Материалы и методы.* Асимптотика фундаментальной системы решений дифференциальных уравнений с суммируемыми потенциалами при больших значениях спектрального параметра получена обобщенным методом Наймарка. Для нахождения корней уравнения на собственные значения изучаемого оператора методом Беллмана – Кука исследована индикаторная диаграмма, которая является правильным шестнадцатиугольником. Асимптотика собственных значений изучаемых дифференциальных операторов в различных секторах индикаторной диаграммы найдена методом последовательных приближений Пикара. *Результаты.* Изучен спектр ранее не изучаемого семейства дифференциальных операторов высокого четного порядка, потенциалы которых сходятся к дельта-функции Дирака. С учетом условия «склейки» в точках разрыва потенциалов доказано, что уравнение на собственные значения представляет собой квазиполином, корни которого можно найти методом Беллмана – Кука. Аналогичные результаты можно получить и для других видов разделенных граничных условий. *Выводы.* Полученные новые результаты об асимптотике спектра семейства дифференциальных операторов могут быть применены к исследованию базисности собственных функций аналогичных операторов, изучению функции Грина и вычислению формул регуляризованных следов операторов, последовательность потенциалов которых сходится к дельта-функции Дирака. Метод дельта-потенциалов применяется

© Митрохин С. И., 2021. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

в физике для исследования короткодействующих примесей, дефектов в различных системах. В атомной и ядерной физике огромную популярность имеет модель точечных потенциалов, это подтверждает необходимость изучения операторов с дельта-потенциалами.

Ключевые слова: дифференциальный оператор с разрывными коэффициентами, асимптотика решений дифференциального уравнения, кусочно-суммируемый потенциал, дельта-функция Дирака, асимптотика собственных значений, спектр оператора

Для цитирования: Митрохин С. И. Об изучении спектра семейства дифференциальных операторов, потенциалы которых сходятся к дельта-функции Дирака // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 20–38. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-3

On the studying the spectrum of differential operators' family whose potentials converge to the Dirac delta function

S.I. Mitrokhin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

mitrokhin-sergey@yandex.ru

Abstract. *Background.* The paper proposes a new method for studying differential operators with discontinuous coefficients. We study a sequence of differential operators of high even order whose potentials converge to the Dirac delta function. It is assumed that the operator's potential is a piecewise-summable function on the segment of the operator task. At the points of discontinuity of the potential, the fulfillment of the "gluing" conditions is required to correctly determine the solutions of the corresponding differential equations. The spectral properties of differential operators defined on a finite segment with one of the types of separated boundary conditions are investigated. For large values of the spectral parameter, the Naimark method is used to obtain the asymptotics of the fundamental system of solutions of the corresponding differential equations. With the help of this asymptotics, the conditions for "gluing" the considered differential operator are studied. Then the boundary conditions of the operator under study are studied. As a result, we derive an eigenvalue equation for the operator under study, which is an entire function. The indicator diagram of the eigenvalue equation, which is a regular hexadecimal, is investigated. In various sectors of the indicator diagram, the method of successive Picard approximations has been used to find the eigenvalue asymptotics of the studied differential operators. In the limiting case, the found asymptotics of the eigenvalues tends to the asymptotics of the eigenvalues of an operator whose potential is the Dirac delta function. *Materials and methods.* The asymptotics of the solutions' fundamental system of differential equations with summable potentials for large values of the spectral parameter is obtained by the generalized Naimark method. To find the roots of the equation for the eigenvalues of the operator under study, the Bellman-cook method is used to study the indicator diagram, which is a regular hexadecagon. The asymptotics of the eigenvalues of the studied differential operators in various sectors of the indicator diagram are found by the method of successive Picard approximations. *Results.* The spectrum of a previously unexplored family of differential operators of high even order whose potentials converge to the Dirac Delta function is studied. Taking into account the "gluing" condition at the points of discontinuity of the potentials, it is proved that the eigenvalue equation is a quasi-polynomial, the roots of which can be found by the Bellman-Cook method. Similar results can be obtained for other types of separated boundary conditions. *Conclusions.* The new results obtained on the asymptotics of the spectrum of a family of differential operators can be applied to the study of the basis property of the eigenfunctions of similar operators, the study of the Green's function, and the calculation of formulas for regularized traces of operators whose sequence of potentials converges to the Dirac delta function. The delta potential method is used in physics to study short-range impurities and defects in various systems. In atomic and nuclear physics, the model of point potentials is very popular; this confirms the need to study operators with delta potentials.

Keywords: differential operator with discontinuous coefficients, asymptotics of differential equation solutions, piecewise-summable potential, Dirac delta function, asymptotics of eigenvalues, spectrum of the operator

For citation: Mitrokhin S.I. On the studying the spectrum of differential operators' family whose po-tentials converge to the Dirac delta function. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;1:20–38. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-3

Введение

Изучим свойства спектра семейства дифференциальных операторов, задаваемых дифференциальными уравнениями

$$y_1^{(16)}(x)+q_1(x)y_1(x)=\lambda a^{16}y_1(x),\ 0\le x<x_{1n},\ a>0; \tag{1}$$

$$y_2^{(16)}(x)+q_2(x)y_2(x)=\lambda a^{16}y_2(x),\ x_{1n}\le x\le x_{2n},\ x_{1n}\le x_0\le x_{2n}, \tag{2}$$

$$y_3^{(16)}(x)+q_3(x)y_3(x)=\lambda a^{16}y_3(x),\ x_{2n}<x\le\pi, \tag{3}$$

при этом на потенциал $Q(x)=\left(q_1(x);q_2(x);q_3(x)\right)^*$ накладываются следующие условия:

$$q_1(x)=0, x\in[0;x_{1n});\, q_3(x)=0, x\in(x_{2n};\pi];$$

$$q_2(x)\in L_1[x_{1n};x_{2n}]\Leftrightarrow\left(\int_{x_{1n}}^{x}q_2(t)\,dt\right)'_x=q_2(x)\ \text{pp на}[x_{1n};x_{2n}];$$

$$\lim_{x\to x_{1n}+0}q_2(x)=0;\ \lim_{x\to x_0-0}q_2(x)=+\infty;\ \lim_{x\to x_0+0}q_2(x)=+\infty;$$

$$\lim_{x\to x_{2n}-0}q_2(x)=0;\ \int_{x_{1n}}^{x_{2n}}q_2(t)\,dt=1; \tag{4}$$

в точках разрыва коэффициентов требуются следующие условия «склейки»:

$$y_1(x_{1n}-0)=y_2(x_{1n}+0);\, y_1^{(m)}(x_{1n}-0)=y_2^{(m)}(x_{1n}+0), m=1,2,\ldots,15; \tag{5}$$

$$y_2(x_{2n}-0)=y_3(x_{2n}+0);\, y_2^{(m)}(x_{2n}-0)=y_3^{(m)}(x_{2n}+0), m=1,2,\ldots,15; \tag{6}$$

с граничными условиями вида

$$y_1^{(m_1)}(0)=y_1^{(m_2)}(0)=\ldots=y_1^{(m_{13})}(0)=y_3^{(n_1)}(\pi)=y_3^{(n_2)}(\pi)=y_3^{(n_3)}(\pi)=0. \tag{7}$$

Условия (4) обеспечивают нам предельные соотношения

$$\lim_{n\to+\infty} q_2(x) = \lim_{n\to+\infty} q_{2,n}(x) = \delta(x - x_0),$$

поэтому предел спектра оператора (1)–(7) при $n \to +\infty$ будет совпадать со спектром дифференциального оператора

$$\overrightarrow{y^{(16)}}(x) + \delta(x - x_0)\vec{y}(x) = \lambda a^{16}\vec{y}(x),$$

$$0 \le x \le \pi,\ \ 0 < x_0 < \pi,\ \ \vec{y}(x) = \left(y_1(x); y_2(x); y_3(x)\right)^*,$$

с граничными условиями (7).

Развитие спектральной теории идет в сторону уменьшения гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений, задающих дифференциальные операторы. Дифференциальные операторы второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами, в том числе с кусочно-гладкой весовой функцией, изучались в работах [1–5]. Необходимость требования выполнения условий «склейки» или условий «сопряжения» в точках разрыва коэффициентов объяснена в монографии [6, гл. 3].

Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными коэффициентами изучены в работе [7]. В статье [8] вычислена асимптотика собственных значений и асимптотика собственных функций оператора Штурма – Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом. В работах [9–13] автором предложен другой метод для обобщения результатов работы [8] на различные типы операторов порядка выше второго с суммируемыми коэффициентами.

В статьях [14–16] вычислен регуляризованный след первого порядка для оператора второго порядка с дельта-потенциалом. Необходимость изучения операторов, потенциалами которых являются дельта-функции, следует из физики: этому посвящены работы [17, 18]. Наша цель: получить аналогичные результаты для операторов порядка выше второго с дельта-потенциалами, приближая такие потенциалы последовательностью кусочно-суммируемых потенциалов. Собственные значения таких операторов будут расположены бесконечно близко. Необходимая теоретическая база исследования таких операторов с кусочно-разрывными коэффициентами или кусочно-разрывной весовой функцией подготовлена работами [19, 20].

1. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (1)–(3) при $\lambda \to \infty$

Пусть $\lambda = s^{16}, s = \sqrt[16]{\pi}$, при этом для корректности дальнейших выкладок зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[16]{1} = +1$. Обозначим через $w_k \left(k = 1, 2, ..., 16\right)$ различные корни шестнадцатой степени из единицы:

$$w_k^{16} = 1,\ \ w_k = e^{\frac{2\pi i}{16}(k-1)},\ \ k = 1, 2, ..., 16;$$

$$w_1 = 1; w_2 = e^{\frac{2\pi i}{16}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = z \ne 0;$$

$$w_3 = e^{\frac{4\pi i}{16}} = z^2; \ldots; w_m = z^{m-1}, \quad m = 1,2,\ldots,16. \tag{8}$$

Точки $w_k\left(k = 1,2,\ldots,16\right)$ из (8) делят единичную окружность на шестнадцать равных частей и для них справедливы свойства:

$$\sum_{k=0}^{16} w_k^m = 0, \quad m = 1,2,\ldots,15;$$

$$\sum_{k=0}^{16} w_k^m = 0, m = 2,3,\ldots,16; \sum_{k=1}^{16} w_k^m = 16, m = 0, m = 16. \tag{9}$$

Методом статей [9, 20] и монографии [21, гл. 2] доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Общие решения дифференциальных уравнений (1)–(3) представляются в следующем виде:

$$y_1\left(x;s\right) = \sum_{k=1}^{16} C_{1k} y_{1k}\left(x;s\right); \; y_1^{(m)}\left(x;s\right) = \sum_{k=1}^{16} C_{1k} y_{1k}^{(m)}\left(x;s\right), \; m = 1,2,\ldots,15; \tag{10}$$

$$y_{1k}\left(x;s\right) = e^{aw_k sx}; \; y_{1k}^{(m)}\left(x;s\right) = \left(aw_k s\right)^m e^{aw_k sx}, \; m = 1,2,\ldots,15; k = 1,2,\ldots,16; \tag{11}$$

$$y_2\left(x;s\right) = \sum_{k=1}^{16} C_{2k} y_{2k}\left(x;s\right); \; y_2^{(m)}\left(x;s\right) = \sum_{k=1}^{16} C_{2k} y_{2k}^{(m)}\left(x;s\right), \; m = 1,2,\ldots,15; \tag{12}$$

$$y_{2k}\left(x;s\right) = e^{aw_k sx} - \frac{1}{16a^{15}s^{15}} \sum_{n=1}^{16} w_n e^{aw_k sx} \times$$

$$\times \int_{x_{1n}}^{x} q_2\left(t\right) e^{a\left(w_k - w_n\right)st} dt_{akn} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right); \; k = 1,2,\ldots,16; \tag{13}$$

$$y_2^{(m)}\left(x;s\right) = \left(aw_k s\right)^m e^{aw_k sx} - \frac{1}{16a^{15}s^{15}} \sum_{n=1}^{16} w_n \left(aw_n s\right)^m e^{aw_n sx} \times$$

$$\times \int_{x_{1n}}^{x} q_2\left(t\right) e^{a\left(w_k - w_n\right)st} dt_{akn} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30-m}}\right); \; k = 1,2,\ldots,16; \; m = 1,2,\ldots,15; \tag{14}$$

$$y_3\left(x;s\right) = \sum_{k=1}^{16} C_{3k} y_{3k}\left(x;s\right); \; y_3^{(m)}\left(x;s\right) = \sum_{k=1}^{16} C_{3k} y_{3k}^{(m)}\left(x;s\right); \; m = 1,2,\ldots,15; \tag{15}$$

$$y_{3k}\left(x;s\right) = e^{aw_k sx}; \; y_3^{(m)}\left(x;s\right) = \left(aw_k s\right)^m e^{aw_k sx}; \; k = 1,2,\ldots,16; \; m = 1,2,\ldots,15; \tag{16}$$

Величины $C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}\,(k=1,2,...,16)$ в формулах (10), (12), (15) – произвольные постоянные, при этом справедливы следующие начальные условия:

$$y_{1k}(0;s)=1;\; y_{1k}^{(m)}(0;s)=(aw_k s)^m;\; y_{2k}(x_{1n};s)=e^{aw_k s x_{1n}};$$

$$y_{2k}^{(m)}(x_{1n};s)=(aw_k s)^m e^{aw_k s x_{1n}};\; y_{3k}(x_{2n};s)=e^{aw_k s x_{2n}};$$

$$y_{3k}^{(m)}(x_{2n};s)=(aw_k s)^m e^{aw_k s x_{2n}};\; k=1,2,...,16;\; m=1,2,...,15. \qquad (17)$$

2. Изучение условий «склейки» (5)

Из условий склейки (5) с помощью формул (10) и (12) получаем:

$$\begin{cases} y_2(x_{1n}+0;s) \overset{(5)}{=} y_1(x_{1n}-0;s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{16} C_{2k} y_{2k}(x_{1n}+0;s) = \sum\limits_{k=1}^{16} C_{1k} y_{1k}(x_{1n}-0;s); & (18) \\ \dfrac{y_2^{(m)}(x_{1n}+0;s)}{(as)^m} \overset{(5)}{=} \dfrac{y_1^{(m)}(x_{1n}-0;s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{16} C_{2k} \dfrac{y_{2k}^{(m)}(x_{1n}+0;s)}{(as)^m} = \sum\limits_{k=1}^{16} C_{1k} \dfrac{y_{1k}^{(m)}(x_{1n}-0;s)}{(as)^m},\; m=1,2,...,15. & (19) \end{cases}$$

Система (18)–(19) имеет единственное решение, так как ее определитель не равен нулю:

$$C_{21}=\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{02}(x;s)\neq 0}; C_{22}=\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{02}(x;s)};...; C_{2,16}=\frac{\Delta_{2,16}}{\Delta_{02}(x;s)}, \qquad (20)$$

$$\Delta_{02}(x;s)=\begin{vmatrix} y_{21}(x;s) & y_{22}(x;s) & ... & y_{2,16}(x;s) \\ \dfrac{y'_{21}(x;s)}{as} & \dfrac{y'_{22}(x;s)}{as} & ... & \dfrac{y'_{2,16}(x;s)}{as} \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{y_{21}^{(15)}(x;s)}{(as)^{15}} & \dfrac{y_{22}^{(15)}(x;s)}{(as)^{15}} & ... & \dfrac{y_{2,16}^{(15)}(x;s)}{(as)^{15}} \end{vmatrix}, \qquad (21)$$

определители Δ_{2k} из (20) получаются из определителя $\Delta_{02}(x_{1n};s)$ из (21) заменой k-го столбца на столбец:

$$\left(\sum_{k=1}^{16} C_{1k} y_{1k}(x_{1n}-0;s); \sum_{k=1}^{16} C_{1k} \frac{y'_{1k}(x_{1n}-0;s)}{as};...; \sum_{k=1}^{16} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(15)}(x_{1n}-0;s)}{(as)^{15}}\right)^*. \qquad (22)$$

Определитель $\Delta_{02}(x;s)$ из (21) является определителем Вронского фундаментальной системы решений $\{y_{2k}(x;s)\}_{k=1}^{16}$ линейного дифференциального уравнения (2), поэтому он не равен нулю и не зависит от x. В силу формул (13)–(14) и (9), (17) получаем:

$$\Delta_{02}(x;s) = \Delta_{02}(s) = \Delta_{02}(x_{1n};s) =$$
$$= \det Wr\left[y_{21}(x;s); y_{22}(x;s); ...; y_{2,16}(x;s)\right] = \Delta_{00} \neq 0, \qquad (23)$$

где Δ_{00} – определитель Вандермонда чисел $w_k\ (k=1,2,...,16)$:

$$\Delta_{00} = \det Wandermond\grave{}s(w_1, w_2, ..., w_{16}) =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 & ... & w_{15} & w_{16} \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & ... & w_{15}^2 & w_{16}^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ w_1^{15} & w_2^{15} & w_3^{15} & ... & w_{15}^{15} & w_{16}^{15} \end{vmatrix} =$$
$$= \prod_{\substack{k>m;\\ k,m=1,2,...,16}} (w_k - w_m) = \Delta_{00} \neq 0. \qquad (24)$$

Используя свойства определителей, подставим формулы (22), (11) в (20)–(21), выведем следующие формулы:

$$\Delta_{21} = \Delta_{00}C_{11};\ \Delta_{22} = \Delta_{00}C_{12}; ...; \Delta_{2,16} = \Delta_{00}C_{1,16}. \qquad (25)$$

3. Изучение условий «склейки» (6)

Подставляя формулы (15) и (12) в условия «склейки» (6), получаем:

$$\begin{cases} y_3(x_{2n}+0;s) \overset{(6)}{=} y_2(x_{2n}-0;s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{16} C_{3k} y_{3k}(x_{2n}+0;s) = \sum\limits_{k=1}^{16} C_{2k} y_{2k}(x_{2n}-0;s); \qquad (26) \\ \dfrac{y_3^{(m)}(x_{1n}+0;s)}{(as)^m} \overset{(6)}{=} \dfrac{y_2^{(m)}(x_{2n}-0;s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{16} C_{3k} \dfrac{y_{3k}^{(m)}(x_{2n}+0;s)}{(as)^m} = \sum\limits_{k=1}^{16} C_{2k} \dfrac{y_{2k}^{(m)}(x_{1n}-0;s)}{(as)^m},\ m=1,2,...,15. \qquad (27) \end{cases}$$

Система (26)–(27) также имеет единственное решение, так как ее определитель не равен нулю:

$$C_{31}=\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{03}(x;s)\neq 0};C_{32}=\frac{\Delta_{32}}{\Delta_{03}(x;s)};...;C_{3,16}=\frac{\Delta_{3,16}}{\Delta_{03}(x;s)}, \qquad (28)$$

$$\Delta_{03}(x;s)=\begin{vmatrix} y_{31}(x;s) & y_{32}(x;s) & ... & y_{3,16}(x;s) \\ \frac{y'_{31}(x;s)}{as} & \frac{y'_{32}(x;s)}{as} & ... & \frac{y'_{3,16}(x;s)}{as} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{y_{31}^{(15)}(x;s)}{(as)^{15}} & \frac{y_{32}^{(15)}(x;s)}{(as)^{15}} & ... & \frac{y_{3,16}^{(15)}(x;s)}{(as)^{15}} \end{vmatrix}\overset{(16)}{=}$$

$$\overset{(16)}{=}\begin{vmatrix} e^{aw_1sx} & e^{aw_2sx} & ... & e^{aw_{16}sx} \\ w_1e^{aw_1sx} & w_2e^{aw_2sx} & ... & w_{16}e^{aw_{16}sx} \\ ... & ... & ... & ... \\ w_1^{15}e^{aw_1sx} & w_2^{15}e^{aw_2sx} & ... & w_{16}^{15}e^{aw_{16}sx} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{a(w_1+w_2+...+w_{16})sx}\Delta_{00}=e^0\Delta_{00}=\Delta_{00}\neq 0, \qquad (29)$$

определители $\Delta_{3k}\ (k=1,2,...,16)$ из формулы (28) получаются из определителя $\Delta_{03}(x_{2n};s)$ из (29) заменой k-го столбца на столбец:

$$\left(\sum_{k=1}^{16}C_{2k}y_{2k}(x_{2n}-0;s);\sum_{k=1}^{16}C_{2k}\frac{y_{2k}'(x_{2n}-0;s)}{as};...;\sum_{k=1}^{16}C_{2k}\frac{y_{2k}^{(15)}(x_{2n}-0;s)}{(as)^{15}}\right)^*, \qquad (30)$$

где $k=1,2,...,16.$

Используя свойства определителей, подставим формулы (30) в (28)–(29), находим:

$$\Delta_{3p}=\sum_{k=1}^{16}C_{2k}\Delta_{3pk},\ p=1,2,...,16, \qquad (31)$$

определители Δ_{3pk} из формулы (31) получаются из определителя $\Delta_{03}(x_{2n};s)$ из (29) заменой p-го столбца $(p=1,2,...,16)$ на столбец получаем:

$$\left(y_{2k}(x_{2n}-0;s);\frac{y_{2k}'(x_{2n}-0;s)}{as};...;\frac{y_{2k}^{(15)}(x_{2n}-0;s)}{(as)^{15}}\right)^*, \qquad (32)$$

$p=1,2,...,16.$

Применяя формулы (13), (14), из (31), (32) получаем:

$$\Delta_{31k}=\begin{vmatrix} g_k-\frac{1}{v^{15}}\sum_{n=1}^{16}w_n g_n\left(\int\limits_{x_{1n}}^{x_{2n}}\ldots\right)_{akn}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) & g_2 & \ldots & g_{16}\\ w_k g_k-\frac{1}{v^{15}}\sum_{n=1}^{16}w_n w_n g_n\left(\int\limits_{x_{1n}}^{x_{2n}}\ldots\right)_{akn}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) & w_2 g_2 & \ldots & w_{16}g_{16}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ w_k^{15}g_k-\frac{1}{v^{15}}\sum_{n=1}^{16}w_n w_n^{15}g_n\left(\int\limits_{x_{1n}}^{x_{2n}}\ldots\right)_{akn}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) & w_2^{15}g_2 & \ldots & w_{16}^{15}g_{16}\end{vmatrix};\quad(33)$$

$g_k=e^{aw_k s x_{2n}},k=1,2,\ldots,16;v^{15}=16a^{15}s^{15}$, интегралы $\left(\int\limits_{x_{1n}}^{x_{2n}}\ldots\right)_{akn}$ определены формулами (13)–(14).

Раскладывая определители Δ_{31k} из (33) по столбцам на сумму определителей, получаем:

$$\Delta_{31k}=\Delta_{31k,0}-\frac{1}{16a^{15}s^{15}}\Delta_{31k,15}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right),\qquad(34)$$

$$\Delta_{31k}=\begin{vmatrix} g_k & g_2 & \ldots & g_{16}\\ w_k g_k & w_2 g_2 & \ldots & w_{16}g_{16}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ w_k^{15}g_k & w_2^{15}g_2 & \ldots & w_{16}^{15}g_{16}\end{vmatrix}=\begin{cases}0,k=2,3,\ldots,16;\\ \Delta_{00},k=1;\end{cases}\qquad(35)$$

$$\Delta_{31k,15}=\sum_{n=1}^{2N}w_n\left(\int\limits_{x_{1n}}^{x_{2n}}\ldots\right)_{akn}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ w_1 & w_2 & \ldots & w_{16}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ w_1^{15} & w_2^{15} & \ldots & w_{16}^{15}\end{vmatrix}g_n g_2 g_3(\ldots)g_{16}=$$

$$=\begin{cases} w_1\left(\int\limits_{x_{1n}}^{x_{2n}}\ldots\right)_{akn}\cdot\Delta_{00}e^0,n=1;k=1,2,\ldots,16;\\ 0,n=2,3,\ldots,16.\end{cases}\qquad(36)$$

Вычисляя определители $\Delta_{3m}(m=2,3,\ldots,16)$ из (28), (31) аналогично определителям Δ_{31k} из (33)–(36), выводим следующие формулы:

$$\Delta_{3pk}=\Delta_{3pk,0}-\frac{1}{16a^{15}s^{15}}\Delta_{3pk,15}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right);\ p,k=1,2,\ldots,16,\qquad(37)$$

$$\Delta_{3pk} = \begin{bmatrix} 0, \ p \neq k; \ p, k = 1, 2, ..., 16; \\ \Delta_{00}, \ k = p; \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\Delta_{3pk,15} = \Delta_{00} w_p \left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} ... \right)_{akp}; \ k, \ p = 1, 2, ..., 16. \tag{39}$$

Таким образом, из формул (34)–(39) находим:

$$\Delta_{3kk} = \Delta_{00} \left[1 - \frac{w_k}{16a^{15}s^{15}} \left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} ... \right)_{akk} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}} \right) \right], \ k = 1, 2, ..., 16; \tag{40}$$

$$\Delta_{3pk} = \Delta_{00} \left[1 - \frac{w_p}{16a^{15}s^{15}} \left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} ... \right)_{akp} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}} \right) \right], \ k \neq p; \ k, \ p = 1, 2, ..., 16. \tag{41}$$

Формулы (20), (25), (31), (40), (41) позволяют изучить граничные условия (8).

4. Изучение граничных условий (8)

Подставляя формулы (10)–(11) в первые 13 граничных условий (8), получаем:

$$\frac{y_1^{(m_p)}(0;s)^{(8)}}{(as)^{m_p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m_p)}(0;s)}{(as)^{m_p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{1k} w_k^{m_p} = 0, \ p = 1, 2, ..., 13. \tag{42}$$

Из последних трех граничных условий (8) с помощью формул (15)–(16), (28), (31) и (20) находим:

$$\frac{y_3^{(n_r)}(\pi;s)^{(8)}}{(as)^{n_r}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{3k} \frac{y_{1k}^{(n_r)}(\pi;s)}{(as)^{n_r}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{3k} w_k^{n_r} e^{aw_k s\pi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} \frac{\Delta_{3k}}{\Delta_{03}(s) \neq 0} w_k^{n_r} e^{aw_k s\pi} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} \left(\sum_{n=1}^{16} C_{2n} \Delta_{3kn} \right) w_k^{n_r} e^{aw_k s\pi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{2k} \varphi_{2k,r}(\pi;s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{02}(s) \neq 0} \varphi_{2k,r}(\pi;s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} \frac{\Delta_{00} C_{1k}}{\Delta_{02}(s)} \varphi_{2k,r}(\pi;s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{1k} \varphi_{2k,r}(\pi;s) = 0, \ r = 1, 2, 3, \tag{43}$$

$$\varphi_{2k,r}(\pi;s)=\sum_{n=1}^{16}\Delta_{3nk}w_k^{n_r}e^{aw_n s\pi},\ r=1,2,3. \qquad (44)$$

Уравнения (42)–(44) образуют систему из шестнадцати линейных однородных уравнений с 16 неизвестными $C_{11}, C_{12}, ..., C_{1,16}$. Ненулевые решения такая система имеет только в том случае, если ее определитель равен нулю, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(7) имеет следующий вид:

$$f(s)=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & ... & w_{15}^{m_1} & w_{16}^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & ... & w_{15}^{m_2} & w_{16}^{m_2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ w_1^{m_{13}} & w_2^{m_{13}} & ... & w_{15}^{m_{13}} & w_{16}^{m_{13}} \\ \varphi_{21,1}(\pi;s) & \varphi_{22,1}(\pi;s) & ... & \varphi_{2,15,1}(\pi;s) & \varphi_{2,16,1}(\pi;s) \\ \varphi_{21,2}(\pi;s) & \varphi_{22,2}(\pi;s) & ... & \varphi_{2,15,2}(\pi;s) & \varphi_{2,16,2}(\pi;s) \\ \varphi_{21,3}(\pi;s) & \varphi_{22,3}(\pi;s) & ... & \varphi_{2,15,3}(\pi;s) & \varphi_{2,16,3}(\pi;s) \end{vmatrix}=0, \qquad (45)$$

функции $\varphi_{2k,r}(\pi;s)(k=1,2,...,16; r=1,2,3)$ определены формулами (44), (40), (41).

Применяя формулу Лапласа, разложим определитель $f(s)$ из (45) по последним трем строчкам, получим:

$$f(s)=\begin{vmatrix} \varphi_{21,1} & \varphi_{22,1} & \varphi_{23,1} \\ \varphi_{21,2} & \varphi_{22,2} & \varphi_{23,2} \\ \varphi_{21,3} & \varphi_{22,3} & \varphi_{23,3} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} w_4^{m_1} & w_5^{m_1} & ... & w_{16}^{m_1} \\ ... & ... & ... & ... \\ w_4^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & ... & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix} \varphi_{22,1} & \varphi_{23,1} & \varphi_{24,1} \\ \varphi_{22,2} & \varphi_{23,2} & \varphi_{24,2} \\ \varphi_{22,3} & \varphi_{23,3} & \varphi_{24,3} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_5^{m_1} & ... & w_{16}^{m_1} \\ ... & ... & ... & ... \\ w_1^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & ... & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} \varphi_{23,1} & \varphi_{24,1} & \varphi_{25,1} \\ \varphi_{23,2} & \varphi_{24,2} & \varphi_{25,2} \\ \varphi_{23,3} & \varphi_{24,3} & \varphi_{25,3} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & w_6^{m_1} & ... & w_{16}^{m_1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ w_1^{m_{13}} & w_2^{m_{13}} & w_6^{m_{13}} & ... & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix}-...=0. \qquad (46)$$

Для нахождения корней уравнения (46) необходимо изучить так называемую индикаторную диаграмму этого уравнения (см. [22, гл. 12]). Из формул (44), (40), (41) следует, что индикаторная диаграмма уравнения (46) – это выпуклая оболочка множества точек $\{w_k+w_m+w_p,\ k\neq m, k\neq p;\ k,m,p=1,2,...,16\}$, которая является правильным шестнадцатиугольником $D_1 D_2 D_3 ... D_{15} D_{16}$, вершинами которого являются точки $D_1(w_1 + w_2 + w_3)$, $D_2(w_2 + w_3 + w_4)$, $D_3(w_3 + w_4 + w_5),...,$ $D_{14}(w_{14} + w_{15} + w_{16})$, $D_{15}(w_{15} + w_{16} + w_1)$, $D_{16}(w_{16} + w_1 + w_2)$; точки $E_{kpm}(w_k + w_p + w_m)$ при условии $|k-p| \ge 2$, $|p-m| \ge 2$ или $|k-m| \ge 2$ попадают внутрь этого правильного шестнадцатиугольника, при нахождении корней уравнения (46) их можно отбросить, так как они представляют собой бесконечно малые величины. Корни уравнения (46) находятся в 16 секторах бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам шестнадцатиугольника $D_1 D_2 D_3 ... D_{15} D_{16}$.

Из книги [22, гл. 12] следует, что для нахождения корней уравнения (46) в секторе, перпендикулярном стороне $D_1 D_2$, в этом уравнении необходимо оставить только экспоненты с показателями $w_1 + w_2 + w_3$ и $w_2 + w_3 + w_4$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(7) в секторе, перпендикулярном стороне $D_1 D_2$ индикаторной диаграммы, имеет следующий вид:

$$h_1(s) = \begin{vmatrix} \varphi_{21,1}(\pi;s) & \varphi_{22,1}(\pi;s) & \varphi_{23,1}(\pi;s) \\ \varphi_{21,2}(\pi;s) & \varphi_{22,2}(\pi;s) & \varphi_{23,2}(\pi;s) \\ \varphi_{21,3}(\pi;s) & \varphi_{22,3}(\pi;s) & \varphi_{23,3}(\pi;s) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_4^{m_1} & w_5^{m_1} & ... & w_{16}^{m_1} \\ ... & ... & ... & ... \\ w_4^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & ... & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \varphi_{22,1}(\pi;s) & \varphi_{23,1}(\pi;s) & \varphi_{24,1}(\pi;s) \\ \varphi_{22,2}(\pi;s) & \varphi_{23,2}(\pi;s) & \varphi_{24,2}(\pi;s) \\ \varphi_{22,3}(\pi;s) & \varphi_{23,3}(\pi;s) & \varphi_{24,3}(\pi;s) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_5^{m_1} & ... & w_{16}^{m_1} \\ ... & ... & ... & ... \\ w_1^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & ... & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix} = 0. \quad (47)$$

Применяя формулы (8), получаем:

$$\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & ... & w_{13}^{m_1} \\ ... & ... & ... & ... \\ w_1^{m_{13}} & w_2^{m_{13}} & ... & w_{13}^{m_{13}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & ... & z^{12m_1} \\ ... & ... & ... & ... \\ 1^{m_{13}} & z^{m_{13}} & ... & z^{12m_{13}} \end{vmatrix} =$$

$$= \det Wandermond`s\left(z^{m_1}; z^{m_2}; ...; z^{m_{13}}\right) = \prod_{\substack{k>p \\ k,p=1,2,...,13}} \left(z^{m_k} - z^{m_p}\right) = R_{13} \ne 0; \quad (48)$$

$$\begin{vmatrix} w_4^{m_1} & w_5^{m_1} & ... & w_{16}^{m_1} \\ ... & ... & ... & ... \\ w_4^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & ... & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^{3m_1} & z^{4m_1} & ... & z^{15m_1} \\ ... & ... & ... & ... \\ z^{3m_{13}} & z^{4m_{13}} & ... & z^{15m_{13}} \end{vmatrix} \overset{(48)}{=} z^{3M_{13}} R_{13}, M_{13} = \sum_{k=1}^{13} m_k;$$

$$\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_5^{m_1} & \dots & w_{16}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & \dots & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_5^{m_1} & \dots & w_2^{m_1} & w_1^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_5^{m_{13}} & \dots & w_2^{m_{13}} & w_1^{m_{13}} \end{vmatrix} \overset{(48)}{=} z^{4M_{13}} R_{13}, \dots \tag{49}$$

Подставим формулы (48)–(49) в уравнение (47), поделим на $z^{3M_{13}} R_{13} \neq 0$, учтем свойства определителей, приведем его в следующему виду:

$$h_1(s) = \begin{vmatrix} \varphi_{21,1}(\pi;s) - z^{M_{13}} \varphi_{24,1}(\pi;s) & \varphi_{22,1}(\pi;s) & \varphi_{23,1}(\pi;s) \\ \varphi_{21,2}(\pi;s) - z^{M_{13}} \varphi_{24,2}(\pi;s) & \varphi_{22,2}(\pi;s) & \varphi_{23,2}(\pi;s) \\ \varphi_{21,3}(\pi;s) - z^{M_{13}} \varphi_{24,2}(\pi;s) & \varphi_{22,3}(\pi;s) & \varphi_{23,3}(\pi;s) \end{vmatrix} = 0. \tag{50}$$

Применяя формулы (44), (40), (41) и оставляя только необходимые для сектора, перпендикулярного стороне $D_1 D_2$, экспоненты $e^{a(w_1+w_2+w_3)s\pi}$ и $e^{a(w_2+w_3+w_4)s\pi}$, произведем вычисления с точностью до $\underline{O}\left(\frac{1}{s^{15}}\right)$ и приведем уравнение (50) к следующему виду:

$$h_1(s) = \Big[T_{123} \Delta_{311} \Delta_{322} \Delta_{333} e^{a(w_1+w_2+w_3)s\pi} -$$

$$- z^{M_{13}} T_{423} \Delta_{344} \Delta_{322} \Delta_{333} e^{a(w_4+w_2+w_3)s\pi} \Big] +$$

$$+ \Big\{ T_{423} \Delta_{341} \Delta_{322} \Delta_{333} e^{a(w_2+w_3+w_4)s\pi} -$$

$$- z^{M_{13}} T_{123} \Delta_{314} \Delta_{322} \Delta_{333} e^{a(w_1+w_2+w_3)s\pi} + \overset{=}{o}(1) \Big\} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) = 0; \tag{51}$$

$$T_{123} = \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \\ w_1^{n_3} & w_2^{n_3} & w_3^{n_3} \end{vmatrix} \overset{(8)}{=} \begin{vmatrix} 1^{n_1} & z^{n_1} & z^{2n_1} \\ 1^{n_2} & z^{n_2} & z^{2n_2} \\ 1^{n_3} & z^{n_3} & z^{2n_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(z^{n_3} - z^{n_2}\right)\left(z^{n_3} - z^{n_1}\right)\left(z^{n_2} - z^{n_1}\right) = T_{123} \neq 0; \tag{52}$$

$$T_{423} = \begin{vmatrix} w_4^{n_1} & w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_4^{n_2} & w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \\ w_4^{n_3} & w_2^{n_3} & w_3^{n_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_3^{n_1} & w_4^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_3^{n_2} & w_4^{n_2} \\ w_2^{n_3} & w_3^{n_3} & w_4^{n_3} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} z^{n_1} & z^{2n_1} & z^{3n_1} \\ z^{n_2} & z^{2n_2} & z^{3n_2} \\ z^{n_3} & z^{2n_3} & z^{3n_3} \end{vmatrix} = z^{N_3} T_{123},\, N_3 = \sum_{k=1}^{3} n_k. \qquad (53)$$

Подставляя формулы (52)–(53) в уравнение (51), поделим на $T_{123} e^{a(w_4+w_2+w_3)s\pi} \neq 0$, получим:

$$h_1(s) = \left[\Delta_{311}\Delta_{322}\Delta_{333} e^{a(w_1-w_4)s\pi} - z^{M_{13}} z^{N_3} \Delta_{344}\Delta_{322}\Delta_{333}\right] +$$

$$+\left[z^{N_3}\Delta_{341}\Delta_{322}\Delta_{333} - z^{M_{13}}\Delta_{314}\Delta_{322}\Delta_{333} e^{a(w_1-w_4)s\pi}\right] + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) = 0. \qquad (54)$$

Используя формулы (40)–(41), приведем уравнение (54) к следующему виду:

$$h_1(s) = \left[e^{a(w_1-w_4)s\pi}\left(1 - \frac{w_1+w_2+w_3}{16a^{15}s^{15}} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t)\,dt_{a11} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right)\right) - \right.$$

$$\left. - z^{M_{13}} z^{N_3}\left(1 - \frac{w_2+w_3+w_4}{16a^{15}s^{15}} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t)\,dt_{a22} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right)\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{16a^{15}s^{15}}\left[w_4 z^{N_3} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) e^{a(w_1-w_4)s\pi}\,dt_{a14} - w_4 z^{M_{13}} e^{a(w_1-w_4)s\pi} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) e^{a(w_4-w_1)s\pi}\,dt_{a41} \right] + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) = 0. \qquad (55)$$

Основное приближение уравнения (55) имеет вид

$$e^{a(w_1-w_4)s\pi} = z^{M_{13}} z^{N_3} = e^{2\pi i k} e^{\frac{2\pi i}{16} M_{13}} e^{\frac{2\pi i}{16} N_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s_{k,1,осн} = \frac{2i\tilde{k}}{a(w_1-w_4)},\ \tilde{k} = k + \frac{M_{13}+N_3}{16},\ k \in N. \qquad (56)$$

Из общей теории нахождения корней квазиполиномов вида (56) (см. [22, гл. 12; 23]) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(7) в секторе, перпендикулярном стороне $D_1 D_2$ индикаторной диаграммы, имеет следующий вид:

$$s_{k,1}(n)=\frac{2i}{a(w_1-w_4)}\left[\tilde{k}+\frac{d_{15,k,1}(n)}{\tilde{k}^{15}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{30}}\right)\right], \tag{57}$$

$$\tilde{k}=k+\frac{M_{13}+N_3}{16},\ k=1,2,3,...$$

Доказательство. Из формулы Маклоренда следует:

$$e^{a(w_1-w_4)s\pi}\Big|_{s_{k,1}(n)}=\exp\left[a(w_1-w_4)\pi\frac{2i}{a(w_1-w_4)}\left(\tilde{k}+\frac{d_{15,k,1}(n)}{\tilde{k}^{15}}+...\right)\right]=$$

$$=z^{M_{33}}z^{N_3}\left[1+\frac{2\pi i d_{15,k,1}(n)}{\tilde{k}^{15}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right)\right];$$

$$\frac{1}{s^{15}}\Big|_{s_{k,1}(n)}=\frac{a^{15}(w_1-w_4)^{15}}{2^{15}i^{15}}\frac{1}{\tilde{k}^{15}}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{16}}\right)\right). \tag{58}$$

Подставляя формулы (57), (58) в уравнение (55), вычисляем:

$$z^{M_{13}}z^{N_3}\left[1+\frac{2\pi i d_{15,k,1}(n)}{\tilde{k}^{15}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{30}}\right)\right]\cdot\left[1-\frac{(w_1+w_2+w_3)a^{15}}{16a^{15}2^{15}i^{15}}\frac{(w_1-w_4)^{15}}{\tilde{k}^{15}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{16}}\right)\right)\int_{x_{1n}}^{x_{2n}}q_2(t)\,dt_{a11}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{30}}\right)\right]-$$

$$-z^{M_{13}}z^{N_3}\left[1-\frac{(w_2+w_3+w_4)a^{15}(w_1-w_4)^{15}}{16a^{15}2^{15}i^{15}\tilde{k}^{15}}\int_{x_{1n}}^{x_{2n}}q_2(t)\,dt_{a22}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{30}}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{16a^{15}}\frac{a^{15}(w_1-w_4)^{15}}{2^{15}i^{15}\tilde{k}^{15}}\left[w_4z^{N_3}\int_{x_{1n}}^{x_{2n}}q_2(t)e^{2\tilde{k}ti}\,dt_{a14}-\right.$$

$$\left.-w_1z^{M_{13}}z^{M_{13}}z^{N_3}\int_{x_{1n}}^{x_{2n}}q_2(t)e^{-2\tilde{k}ti}\,dt_{a41}\right]+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{30}}\right)=0. \tag{59}$$

При $1/\tilde{k}^0$ в уравнении (59) получается верное равенство. Приравнивая в уравнении (59) коэффициенты при $1/\tilde{k}^{15}$, выводим следующую формулу:

$$d_{15,k,1}(n)=\frac{(w_1-w_4)^{16}}{16\pi 2^{16}i^{16}}\left\{\int_{x_{1n}}^{x_{2n}}q_2(t)\,dt_{a11}+\frac{e^{\frac{7\pi i}{16}}}{w_1-w_4}\frac{2i}{2i}\left[e^{\frac{7\pi i}{16}}e^{\frac{-2\pi i}{16}M_{13}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t)e^{2\tilde{k}ti}dt_{a14}-e^{-\frac{7\pi i}{16}}e^{\frac{2\pi i}{16}M_{2N-3}}\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t)e^{-2\tilde{k}ti}dt_{a41}\right]\right\},\ k=1,2,3,\ldots \quad (60)$$

Применяя формулу (8), находим:

$$\frac{2ie^{\frac{7\pi i}{16}}}{w_1-w_4}=\frac{2i}{e^{\frac{-7\pi i}{16}}\left[1-e^{\frac{2\pi i}{16}3}\right]}=-\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)};(w_1-w_4)^{16}=(-1)2^{16}\sin^{16}\left(\frac{3\pi}{16}\right). \quad (61)$$

Подставляя формулу (61) в (60), получаем:

$$d_{15,k,1}(n)=\frac{(-1)^7\sin^{16}\left(\frac{3\pi}{16}\right)}{16\pi}\times$$

$$\times\left[\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t)dt_{a11}-\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)}\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t)\sin\left(2\tilde{k}t+\frac{3\pi}{16}-\frac{3\pi}{16}M_{13}\right)dt\right],\ k=1,2,3,\ldots \quad (62)$$

Находя предел при $n\to+\infty$, из формулы (62) получаем:

$$\lim_{n\to+\infty} d_{15,k,1}(n)\overset{(4)}{=}\frac{(-1)^7\sin^{16}\left(\frac{3\pi}{16}\right)}{16\pi}\times$$

$$\times\left[1-\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)}\lim_{n\to+\infty}\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t)\sin\left(2\tilde{k}t+\frac{3\pi}{16}-\frac{2\pi}{16}M_{13}\right)dt\right],$$

эта формула дает спектр предельного оператора (1)–(7) с потенциалом дельта-функцией.

Список литературы

1. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Математические заметки. 1977. Т. 22, № 5. С. 698–723.
2. Митрохин С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. 1986. № 6. С. 3–6.
3. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Доклады Академии наук. 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.
4. Митрохин С. И. О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 6. С. 927–931.

5. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 3. С. 530–532.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977. 736 с.
7. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.
8. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1423–1426.
9. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2010. Т. 270. С. 188–197.
10. Митрохин С. И. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 4. С. 95–115.
11. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2008. № 8. С. 172–187.
12. Митрохин С. И. Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциального уравнения с суммируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1085–1093.
13. Митрохин С. И. Асимптотика спектра периодической краевой задачи для дифференциального оператора с суммируемым потенциалом // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 136–149.
14. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 6. С. 735–751.
15. Савчук А. М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма – Лиувилля с δ-потенциалом // Успехи математических наук. 2000. Т. 55, № 6. С. 155–156.
16. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Формула следа для операторов Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 427–442.
17. Березин Ф. А., Фадеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Доклады Академии наук. 1961. Т. 137, № 5. С. 1011–1014.
18. Борисов Д. И. О лакунах в спектре Лапласиана в полосе с периодическим дельта-взаимодействием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 46–53.
19. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией // Известия вузов. Сер. : Математика. 2018. № 6. С. 31–47.
20. Митрохин С. И. Спектральные свойства дифференциальных операторов четного порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. 2017. № 4. С. 3–15.
21. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
22. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М. : Мир, 1967. 548 с.
23. Садовничий В. А., Любишкин В. А. О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 109–116.

References

1. Il'in V.A. On the convergence of the expansion in terms of eigenfunctions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*. 1977;22(5):698–723. (In Russ.)
2. Mitrokhin S.I. Regularized trace formulas for second-order differential operators with discontinuous coefficients. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika = Bulletin of Moscow University. Series 1, Mathematics, Mechanics*. 1986;6:3–6. (In Russ.)
3. Mitrokhin S.I. On some spectral properties of second-order differential operators with a discontinuous weight function. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*. 1997;356(1):13–15. (In Russ.)
4. Mitrokhin S.I. Trace formulas for a boundary value problem with a functional differential equation with a discontinuous coefficient. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1986;22(6):927–931. (In Russ.)
5. Mitrokhin S.I. Spectral properties of differential operators with discontinuous coefficients. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1992;28(3):530–532. (In Russ.)
6. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1977:736. (In Russ.)
7. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Sturm – Liouville operators with singular potentials. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*.1999;66(6):897–912. (In Russ.)
8. Vinokurov V.A., Sadovnichiy V.A. Asymptotics of any order of eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm – Liouville boundary value problem on an interval with summable potential. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1998;34(10):1423–1426. (In Russ.)
9. Mitrokhin S.I. Spectral properties of a fourth-order differential operator with summable coefficients. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova = Proceedings of Steklov Mathematical Institute*. 2010;270:188–197. (In Russ.)
10. Mitrokhin S.I. Spectral properties of a certain differential operator with summable coefficients with lagging argument. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal = Ufa mathematical journal*. 2011;3(4):95–115. (In Russ.)
11. Mitrokhin S.I. Spectral properties of a differential operator with an integrable potential and a smooth weight function. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural sciences' series*. 2008;8:172–187. (In Russ.)
12. Mitrokhin S.I. Spectral properties of boundary value problems for a functional differential equation with summable coefficients. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2010;46(8):1085–1093. (In Russ.)
13. Mitrokhin S.I. Asymptotics of the spectrum of a periodic boundary value problem for a differential operator with summable potential. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN = Proceedings of Institute of mathematics and mechanics of Ural department of the Russian Academy of Sciences*. 2019;25(1):136–149. (In Russ.)
14. Vinokurov V.A., Sadovnichiy V.A. Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions and the trace formula for potential containing δ-functions. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2002;38(6):735–751. (In Russ.)
15. Savchuk A.M. Regularized trace of the first order of the Sturm – Liouville operator with δ-potential. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Advances in mathematical sciences*. 2000;55(6):155–156. (In Russ.)
16. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Trace formula for Sturm-Liouville operators with singular potentials. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*. 2001;69(3):427–442. (In Russ.)
17. Berezin F.A., Fadeev L.D. Remark on the Schrödinger equation with singular potential. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*. 1961;137(5):1011–1014. (In Russ.)

18. Borisov D.I. On gaps in the Laplacian spectrum in a band with periodic delta interaction. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN = Proceedings of Institute of mathematics and mechanics of Ural department of the Russian Academy of Sciences*. 2018;24(2):46–53. (In Russ.)
19. Mitrokhin S.I. Asymptotics of the eigenvalues of a differential operator with an alternating weight function. *Izvestiya vuzov. Ser.: Matematika = University proceedings. Series: Mathematics*. 2018;6:31–47. (In Russ.)
20. Mitrokhin S.I. Spectral properties of differential operators of even order with summable coefficients. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika = Bulletin Moscow University. Series 1, Mathematics. Mechanics*. 2017;4:3–15. (In Russ.)
21. Naymark M.A. *Lineynye differentsial'nye operatory = Linear differential operators*. Moscow: Nauka, 1969:528. (In Russ.)
22. Bellman R., Kuk K.L. *Differentsial'no-raznostnye uravneniya = Differential-difference equations*. Moscow: Mir, 1967:548. (In Russ.)
23. Sadovnichiy V.A., Lyubishkin V.A. On some new results in the theory of regularized traces of differential operators. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations.* 1982;18(1):109–116. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Сергей Иванович Митрохин
кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Научно-исследовательского вычислительного центра, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Россия, г. Москва, Ленинские Горы, 1, строение 6)

Sergey I. Mitrokhin
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, senior staff scientist of Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University (building 6, 1 Leninskiye Gory, Moscow, Russia)

E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Поступила в редакцию / Received 17.09.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 05.10.2020

Принята к публикации / Accepted 21.12.2020